

Действия с векторами в координатах

Задания, которые будут рассмотрены, крайне желательно научиться решать на полном автомате, а формулы запомнить наизусть, даже специально не запоминать, сами запомнятся => Это весьма важно, поскольку на простейших элементарных примерах базируются другие задачи геометрии.

Как найти вектор по двум точкам?

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то вектор \overline{AB} имеет следующие координаты:

$$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

То есть, из координат конца вектора нужно вычесть соответствующие координаты начала вектора.

Задание: Для тех же точек запишите формулы нахождения координат вектора \overline{BA} .

Пример 1

Даны две точки плоскости $A(2; 1)$ и $B(-2; 3)$. Найти координаты вектора \overline{AB}

Решение: по соответствующей формуле:

$$\overline{AB}(-2 - 2; 3 - 1) = \overline{AB}(-4; 2)$$

Как вариант, можно было использовать следующую запись:

$$\overline{AB} = (-2 - 2; 3 - 1) = (-4; 2)$$

Эстеты решат и так: $\overline{AB} = (-2 - 2)\vec{i} + (3 - 1)\vec{j} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$

Лично я привык к первой версии записи.

Ответ: $\overline{AB}(-4; 2)$

Дамы и господа, набиваем руку:

Пример 2

а) Даны точки $A(-4; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти векторы \overline{AB} и \overline{BA} .

б) Даны точки $A(2; 0)$, $B(-7; 1)$ и $C(4; 1)$. Найти векторы \overline{AB} , \overline{AC} и \overline{BC} .

Как найти длину отрезка?

Длина, как уже отмечалось, обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то длину отрезка

$$AB \text{ можно вычислить по формуле } |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Примечание: Формулы останутся корректными, если переставить

местами соответствующие координаты: $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ и

$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, но более стандартен первый вариант

Пример 3

Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину отрезка AB .

Решение: по соответствующей формуле:

$$|AB| = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $|AB| = 4\sqrt{5}$

Как найти длину вектора?

Если дан вектор плоскости $\vec{v}(v_1; v_2)$, то его длина вычисляется по формуле

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Данные формулы (как и формулы длины отрезка) легко выводятся с помощью небезызвестной теоремы Пифагора.

Пример 5

Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину вектора \overline{AB} .

Я взял те же точки, что и в Примере 3.

Решение: Сначала найдём вектор \overline{AB} :

$$\overline{AB}(1 - (-3); -3 - 5) = \overline{AB}(4; -8)$$

По формуле $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ вычислим длину вектора:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $|\overline{AB}| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8,94$ ед.

Для тренировки:

Пример 6

а) Даны точки $A(0; 2; 5)$ и $B(-4; 7; 15)$. Найти длину вектора \overline{BA} .

б) Даны векторы $\vec{a}(-2; 6)$, $\vec{b}(-4\sqrt{2}; 2; 0)$, $\vec{c} = 4\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$ и $\vec{d} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$. Найти их длины.

Пример 7

Даны векторы $\vec{a}(1; -2)$ и $\vec{b}(2; 3)$. Найти $2\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$

Решение чисто аналитическое:

$$2\vec{a} = 2(1; -2) = (2; -4)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (1; -2) + (2; 3) = (1+2; -2+3) = (3; 1)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1; -2) - (2; 3) = (1-2; -2-3) = (-1; -5)$$

Ответ: $2\vec{a} = (2; -4)$, $\vec{a} + \vec{b} = (3; 1)$, $\vec{a} - \vec{b} = (-1; -5)$

Пример 8

Даны векторы $\vec{a}(0; 4; -7)$ и $\vec{b}(7; -9; 1)$. Найти $3\vec{a} - 2\vec{b}$ и $-\vec{a} + 4\vec{b}$

Решение: Для действий с векторами справедлив обычный алгебраический приоритет: сначала умножаем, потом складываем:

$$\begin{aligned} 3\vec{a} - 2\vec{b} &= 3(0; 4; -7) - 2(7; -9; 1) = (0; 12; -21) - (14; -18; 2) = \\ &= (0 - 14; 12 - (-18); -21 - 2) = (-14; 30; -23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\vec{a} + 4\vec{b} &= -(0; 4; -7) + 4(7; -9; 1) = (0; -4; 7) + (28; -36; 4) = \\ &= (0 + 28; -4 - 36; 7 + 4) = (28; -40; 11) \end{aligned}$$

Ответ: $3\vec{a} - 2\vec{b} = (-14; 30; -23)$, $-\vec{a} + 4\vec{b} = (28; -40; 11)$

И в заключение занятный пример с векторами на плоскости:

Пример 9

Даны векторы $\vec{a}(1; -2)$, $\vec{b}(2; 0)$, $\vec{c}(-4; 2)$. Найти $3\vec{a} - 5\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ и $-2(\vec{a} - 2\vec{c}) + 4\vec{b}$

Это задача для самостоятельного решения.

Автор: Емелин Александр

http://www.mathprofi.ru/vektory_dlya_chainikov.html